SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Mia Mišin

PREGOVARANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Zahvaljujem se svom mentoru doc. dr. sc. Lavoslavu Čakloviću na velikom trudu, pomoći i strpljenju dok je odgovarao na moja bezbrojna pitanja. Veliko hvala i mojoj sestri - pravnici što je danima morala slušati iščitavanje ovoih stranica, a uvjerena sam da ništa od toga nije razumjela. Hvala i Marku jer mi je bio podrška tijekom pisanja ovoga rada, ali i cijelog studiranja, a hvala i mojoj mlađoj sestri koja mi je bila lektor za sažetak na engleskom. Posebno hvala mojoj mami jer je sve godine studiranja uporno pratila web stranice fakulteta i izvještavala me o mojim postignutim uspjesima i novostima na samom fakultetu. A najviše hvala mome tati koji me je jednostavno pustio da studiram u miru i vjerovao u mene. Hvala i mojoj baki na mnogobrojinim ručkovima koje mi je slala za Zagreb.

Sadržaj

Uvod

Odlučivanje je kontekstualno, ono ovisi o okruženju koje možemo kategorizirati kao poslovno, individualno, grupno. U grupnom odlučivanju susrećemo pojedince koji imaju drugačije mišljenje, želje i prioritete nego mi. Njihove aktivnosti utječu na nas i postaju relevantne u donošenju naših odluka. Istovremeno, naše aktivnosti imaju povratni utjecaj na odluke tih istih subjekata ili grupa, tako da končan rezultat odlučivanja koji svatko od nas postiže predstavlja proizvod brojnih individualnih odluka, ali i njihovih međusobnih interakcija. Ponekad se ti utjecaji zasnivaju na suglasnim interesima, dobroj volji ili želji da nekome pomognemo, dok u drugim slučajevima proistječu iz konfliktnih interesa.

Teorija igara predstavlja matematičku teoriju i metodologiju koja se koristi za analizu i rješavanje konfliktnih ili djelomično konfliktnih situacija u kojima sudionici mogu imati suprotstavljene interese. Izvorno je razvijena u svrhu modeliranja ekonomskih situacija, no s vremenom se razvija u zasebnu matematičku disciplinu s čvrstim temeljima i raznovrsnim primjenama. Analiza situacija u kojima dva (ili više) subjekta imaju suprotstavljene interese nazvano je teorija igara zato što tipične primjere ovakvih situacija predstavljaju različite društvene igre, kao što su sportske utakmice, kartaške igre, šah i slično. Možda čak i bolju definiciju teorije igara od ove uvriježene nudi Harsanyu koji ju definira kao teoriju strateških interakcija, odnosno teoriju racionalnih ponašanja u društvenim situacijama. Iako je dio termina koji se koristi u okviru matematičke teorije igara sličan terminologiji društvenih igara, teorija igara ima znatno širu primjenu i koristi se za modeliranje konfliktnih situacija u matematici, politici, ekonomiji, vojnoj strategiji, biologiji i u raznim drugim segmentima svakodnevnog života.

Krajnje pojednostavljeno, teorija igara je matematička analiza interaktivnog odlučivanja racionalnih sudionika. Ali, da bi se socijalne interakcije transformirale u modele podložne matematičkoj analizi potrebne su mnoge dodatne pretpostavke. Prije svega, potrebno je da su prioriteti sudionika u igri jasno definirani. Osim toga, ti prioriteti se moraju na neki način pretvoriti u brojeve. Broj sudionika u igri je najmanje dva, oni trebaju jasno artikulirati svoj odnos u igri putem pravila igre što može uključivati:

1. **Popis stanja igre**

   Ukoliko promatramo pregovore između sindikata i vlade, popis stanja bi bio skup koji obuhvaća sve ono što vlada nudi, sve što sindikati traže i sve ono što je na neki način između te dvije skupine uvjeta, odnosno, matematički rečeno, sve konveksne kombinacije ta dva skupa uvjeta.

2. **Redosljed povlačenja poteza**

   U šahu je redosljed igranja određen u naprijed, odnosno uvijek prvi igra onaj koji ima bijele figure, dok je u kartaškim igrama običaj da se igrači izmjenjuju. To je vrlo bitno definirati, ne samo iz praktičnih razloga, nego i zato što ta činjenica može utjecati na to tko će biti pobjednik u društvenim igrama, odnosno na ostvarivanje individualne korisnosti u igrama općenito.

3. **Skup dopustivih poteza svakog igrača u svakom stanju**

   Ilustrirajmo i ovaj zahtjev na primjeru šaha. Naime, nužno je definirati na koji način možemo igrati s *lovcem*, kako s *kraljicom*, a koja pravila vrijede za *pješaka*, jer to uvelike utječe na tijek igre.

4. **Popis terminalnih ili završnih stanja**

   Terminalno, odnosno završno stanje je stanje nakon kojega nema daljnjih povlačenja poteza, te igra završava. U primjeru šaha, to bi bile sve mogućnosti u kojima je postignut tzv. *šah-mat*, a u primjeru pregovaranja vlade i sindikata, popis terminalnih stanja bio bi onaj skup mogućih dogovora koji bi bili spremni prihvatiti i vlada i sindikat.

5. **Definiranje funkcije isplate na skupu završnih stanja za svakog igrača**

   Funkcija isplate se definira samo na skupu završnih stanja i to posebno za svakog igrača. Ako šah igraju dva igrača, od kojih je jedan profesionalni igrač, a drugi početnik, mogće je da se funkcija isplat definira na sljedeći način:

   a) Pobjeđuje profesionalac - on tada dobila 1000kn, a početnik ne dobiva ništa

   b) Pobjeđuje početnik - on tada dobila 5000 kn, a profesionalac ne obiva ništa

Racionalnost se u teoriji igara formalizira kao maksimizacija individualne korisnoisti, iako taj pristup nije uvijek u stanju riješiti probleme teorije igara na ”opće zadovoljstvo", tj. u smislu optimizacije neke društvene korisnosti. Najčešće spominjani primjer za ilustraciju toga je "Dilema zatvorenika", koji je i polazni primjer u ovom radu.

Kratak pregled povijesnog razvoja teorije igara

Počeci teorije igara datiraju još od prve polovice devetnaestog stoljeća, kada su se pojavili radovi Cournota i Bertrandta u modelima oligopola, koji su nagovijestili mogućnost korištenja teorije igara za potrebe ekonomske analize, posebno u analizi proizvodnje i cijena. Naime, najbolja količina proizvoda jedne tvrtke zavisi od količine proizvodnje ostalih. Cournotov ekvilibrij postiže se onda kada svako poduzeće maksimizira svoj profit za danu količinu proizvodnje ostalih poduzeća, što je, kako će se kasnije pokazati, Nashova ravnoteža.

Formalne osnove teorije igara u današnjem obliku razvijene su tek polovicom 20. stoljeća. Njemački matematičar Ernst Zermelo (1912.) u svom je članku *"O primjeni teorije skupova na teoriju šaha"* prvi povezao razmišljanja o strategiji s teorijom igara, a u njegovim idejama prisutan je i princip dominacije koji se i danas koristi pri rješavanju nekih igara. Zermelov teorem dokazuje da u igrama sa savršenim informacijama, kao što je šah, postoji najmanje jedna sekvencijalna ravnoteža u čistim strategijama, tako da je vjerojatnost svakog poteza ili 0 ili 1. Premda je cijeli zadatak u kontekstu suvremenog rada bio temeljen na teoriji skupova, Zermelo ovaj rad predstavlja kao dio nastojanja da se matematika primijeni na što više područja i da pokaže kako se i druge pojave, bilo psihološke ili fizičke, mogu na neki način objasniti ako se matematički interpretiraju.

Francuski matematičar Emil Borel (1921.) bavio se u svojim radovima problematikom igara u kojoj rezultati ovise o sreći i vještini igrača. Borel je došao do spoznaje da jednom kada je strategija igrača poznata, njegov protivnik može upotrijebiti matematičku strategiju koja bi ga dovela do pobjede. U svojim djelima također uspjeva dokazati tzv. minimax teorem, što je jedan od osnovnih rezultata kada je riječ o igrama sa sumom 0.

Osnovne principe teorije razvio je matematičar John von Neumann koji je imao jedan od najvažnijih utjecaja na razvoj teorije igara uopće. Von Neumann se kao strastveni igrač pokera osobito zanimao za određene aspekte igre. Najviše ga je zanimao način na koji se igrači koriste blefiranjem, obmanama i nagađanjem, ostajući pri tom ipak u okviru pravila igre. Između 1920-ih i 1940-ih von Neumann se bavio matematičkom strukturom pokera i drugih igara. Kako je njegov rad počeo dobivati oblik, dolazi do spoznaje da se njegovi teoremi mogu primjenjivati i na druge znanosti, primjerice politiku, ekonomiju ili pravo. Tako je 1928. godine počeo govorio o matematičko-ekonomskoj disciplini koja modelira situacije natjecanja i suradnje različitih pojedinaca. Međutim, ideju opće teorije igara na teoretski konzistentan način predstavio je zajedno s ekonomistom Oskarom Morgensternom 1944. godine u fundamentalnom radu *"Theory of Games and Economic Behavior"* [4]. Prva primjena teorije bila je početkom 50-ih godina u analizama vojnih strategija i ratova, a učinila je velike pomake u analizi strateških igara i aksiomatizaciji teorije korisnosti, što je dovelo do velikog zanimanja pravnika i ekonomista. Samo ime teorije rezultat je opažanja njenih autora da su situacije u kojima se nalaze igrači društvenih igara, poput šaha ili pokera, veoma slične ekonomskim situacijama.U oba slučaja postoje strogo određena pravila, odnosno dopušteni i nedopušteni potezi. Količina informacija dostupna igračima jasno je određena u svakom trenutku. Igrači svoje odluke donose nazavisno. Dobar potez u šahu, pokeru ili poslovnim pregovorima ovisi o očekivanom potezu suigrača. Zbog toga igrači stalno pokušavaju dokučiti što misle njihovi protivnici. Zato Von Neumann i Morgenstern kreću u izgradnju apstraktnog matematičkog modela konflikta i kooperacije, koji će omogućiti valjane procjene očekivanih poteza druge strane u svakoj situaciji. U njihovom radu pokazano je da se mnogi ekonomski problemi mogu vrlo uspješno modelirati korištenjem teorije igara. Također, u radu su predstavljene igre u ekstenzivnoj i normativnoj formi.

Nakon 2. svjetskog rata, razvoj i usavršavanje teorije igara predstavlja predmet interesa mnogih istaknutih matematičara i ekonomista. Može se čak reći da tijekom dvadesetoga stoljeća niti jedno područje ekonomske analize i matematičkog modeliranja ekonomskih pojava nije ostvarilo toliku ekspanziju i razvoj kao što je to slučaj s teorijom igara.

John F. Nash - Genijalni um

Jedno od najznačajnijih rješenja igre pregovaranja dao je američki nobelovac John Nash 1950. godine. Njegova otkrića u ovom radu predstavljaju ne samo glavni dio, nego i inspiraciju za vlastita poopćenja, pa je stoga dobro navesti neke detalje iz njegova života i djelovanja.

John Nash rođen je 1928. godine u američkoj državi Virginiji. Još kao mali, čitao je iznimno puno, te ga je to usmjerilo ka matematici i zbog toga ju je zavolio, ali bavio se i eksperimentima iz područja elektronike i kemije. Studirao je kemijski inženjering, no poslije samo jednog semestra prešao je na matematiku, iako mu je mentor rekao da je gotovo nemoguće imati dobru karijeru matematičara u Americi u to doba. Nakon što je diplomirao dobio je ponude za doktorski studij na Harvardu i Princetonu, a odlučio se za Princeton jer je vjerovao da su oni više zainteresirani da on dođe baš tamo. Zanimljivo je također i to da je njegov mentor u preporuci napisao samo jednu rečenicu: "Ovaj čovjek je genije!".

Tek na doktorskom studiju pažnju su mu privukli radovi von Neumanna i Morgensterna. Počeo je razvijati vlastite ideje koje su vodile ka, kako se kasnije ispostavilo, teoriji nekooperativnih igara. Konačan oblik ta teorija dobila je u knjizi *"Nash Equilibrium"* [3], koja je objavljena 1950. godine. Iste godine objavljan je i knjiga *"Nash Bargaining Solution"* [2] u kojoj je predstavio rješenje kooperativne igre s dva igrača. Naime, Nash je dokazao da za sve igre s konačnim skupom akcija postoji barem jedna Nashova ravnoteža. U nekoliko narednih godina došao je do izvanrednih rezultata, kako iz područja teorije igara i ekonomije, tako i matematike općenito, te je postao iznimno popularan, posebice u stručnim krugovima.

Sa nepunih trideset godina, na vrhuncu svoje karijere, sputala ga je bolest. Naime, dijagnosticirana mu je paranoidna šizofrenija, bio je opsjednut tajnim službama.

Nash je dobio nobelovu nagradu 1994. godine za analizu ravnoteže u teoriji nekooperativnih igara. Američka spisateljica Silvia Nazar napisala je roman *"A Beautiful Mind"* koji je kasnije poslužio kao scenarij za istoimeni film. Posebice zbog velikog uspjeha filma, Nash je posato još poznatiji i to ne samo u stručnim krugovima, a njegov rad i danas ne prestaje fascinirati ljude širom svijta.

Poglavlje 1

Teorija korisnosti

U ovom poglavlju koriste se rezultati iz knjige doc. dr. sc. Lavoslava Čaklovića *Teorija korisnosti s naglaskom na metodu potencijala; principi, metode, primjene* [1].

1.1 Uvod

Osnovni pojam teorije korisnosti su lutrije, odnosno igre na sreću.

Definicija 1.1.1. *ELEMENTARNA LUTRIJA je niz*

$$l = \langle p_1, x_1; \ldots; p_k, x_k \rangle$$

gdje su $p_i \geqslant 0$ *vjerojatnosti dobitaka* $x_i, i = 1, \ldots, k$ *i* $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ *i moguće je da jedna ili više vjerojatnosti* p_i *budu jednakake* 0*.*

Dobitak x_i identificirat ćemo s lutrijom

$$x_i \equiv \langle 0, x_1; \ldots; 1, x_i; \ldots; 0, x_k \rangle$$

koja dobitku x_i pridjeljuje vjerojatnost 1, a svim ostalim dobitcima vjerojatnost 0. Tako smo postigli da skup svih vrijednosti $\mathcal{S}$ bude podskup skupa svih elementarnih lutrija.

Definicija 1.1.2. *SLOŽENA LUTRIJA je niz*

$$l = \langle p_1, l_1; \ldots; p_s, l_s \rangle$$

gdje dobitak $l_i, i = 1, \ldots, s$ *predstavlja elementarnu lutriju i* $p_i \geqslant 0$ *vjerojatnost dobitka* $l_i, i = 1, \ldots, s$ *i* $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$.

Skup svih lutrija ćemo označiti s $\mathcal{L}$.

Definicija 1.1.3. *KONAČNO SLOŽENA LUTRIJA je lutrija koja se može u konačno koraka rastaviti u neku elementarnu lutriju.*

Ovdje se promatraju samo konačno složene lutrije, a skup svih takvih označen je s $\hat{\mathcal{L}}$. To ima smisla posebno zato što se upravo takve igre na sreću pojavljuju i u svakodnevnom životu, npr. dobitak na nekoj lutriji može biti ulaznica za novu igru, a njih ima konačno mnogo, te se stoga mogu u konačno koraka rastaviti do elementarne lutrije.

Prema navedenim definicijama vrijedi $\mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \hat{\mathcal{L}}$

Primjer 1.1.4.
Pretpostavimo da imamo lutriju u kojoj su svi mogući dobitci samo novčani iznosi, koje ćemo numerirati, tako da imamo moguće dobitke $a_1, a_2, ..., a_n$ i pripadne vjerojatnosti dobitaka $p_1, p_2, ..., p_n$. Tada možemo izračunati očekivanu dobit u igri i ona iznosi

$$r = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i.$$

Prema tome, možemo reći da bi pravedna cijena za ulazak u igru, tj. pravedna cijena tzv. srećke trebala biti r.

Primjer 1.1.5. *Petrogradski paradoks*
Gotovo u samim početcima razvijanja teorije korisnosti D. Bernoulli (1738.) raspravlja o slavnom Petrogradskom paradoksu.
Naime, baca se simetričan novčić dok se ne pojavi glava. Ako se glava pojavi u n-tom bacanju, slijedi isplata od 2^n kuna. Pitanje je koliko je igrač voljan platiti za ulazak u igru.
Označimo sa X slučajnu varijablu isplata. Tada je njezina distribucija:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & \dots & 2^n & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2^n} & \dots \end{pmatrix}$$

Očekivana vrijednost isplate je:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = +\infty.$$

Dakle, ta vrijednost bi bila 'fer' uplata za ulazak u igru, što bi značilo da je svaki konačan iznos kao cijena ulaska u igru prihvatljiv za igrača. Bernoulli je 'razriješio' paradoks uvođenjem pojma korisnosti novca i pretpostavio da marginalna korisnost novca opada. On predlaže funkciju korisnosti $u(x) = \log(x + c), c \in \mathbb{R}$, dok je Cramer (1728.) promatrao drugi korjen kao funkciju korisnosti.

Prigovor na takvo rješenje paradoksa je što je kosrisnost dana i nema razloga preferirati jednu korisnost u odnosu na drugu, a drugi prigovor odnosi se na to da ima smisla promatrati očekivanu vrijednost igre samo ako se igra ponavlja (npr. ima smisla za vlasnika casina, ali ne i za onoga tko igra samo jednom). Prema tim prigovorima von Neumann i Morgenstern razvili su novi pristup koji stavlja igrača, odnosno donositelja odluke u prvi plan. On mora proći kroz određenu proceduru koja mu daje korisnost i mogućnost da se njegove preferencije ogledaju u očekivanoj korisnosti.

Pretpostavimo da donositelj odluke ima preferencije $A \succ B \succ C$ i odlučuje između:

1. sigurnog dobitka B
2. lutrije u kojoj je p vjerojatnost dobitka A, a $1-p$ vjerojatnost dobitka B, tj.

$$l = \langle p, A; 1-p, B \rangle.$$

Ako se p neprekidno mijenja od 1 prem 0, onda je neka vrijednost od p granična (ovdje pretpostavljamo da je to samo za jednu vrijednost od p, a ne za neki interval).

1.2 Aksiomi

Da bi se mogla utvrditi egzistencija očekivane korisnosti, moraju se prvo navesti aksiomi koje donositelj odluke,odnosno njegove preferencije $\succcurlyeq$ mora zadovoljavati.

A1 (Slabi uređaj) Preferencije donositelja odluke $\succcurlyeq$ na skupu $\hat{\mathcal{L}}$ zadovoljavaju aksiome slabe preferencije, odnosno preferencije su potpune i tranzitivne.

Dodatno, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su dobitci označeni tako da je

$$x_1 \succcurlyeq x_2 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq x_k.$$

A2 (Netrivijalnost)

$$x_1 \succ x_k$$

A3 (Redukcija) Neka je $l = \langle q_1, l_1; \ldots; q_s, l_s \rangle$ složena lutrija, gdje je $l_j = \langle p_{j1}, x_1; \ldots; p_{jk}, x_k \rangle$ za $j = 1, \ldots, s$. Ako je $l' = \langle p_1, x_1; \ldots; p_k, x_k \rangle$ elementarna lutrija gdje je $p_i = \sum_{j=1}^{s} q_j p_{ji}$ za $i = 1, \ldots, k$, onda donositelj odluke mora prihvatiti

$$l \sim l'.$$

A4 (Supstitucija) Ako za neke dvije lutrije $a, b \in \hat{\mathcal{L}}$ vrijedi $a \sim b$ i ako je $l = \langle ...; p, a; ... \rangle, l' = \langle ...; p, b; ... \rangle$, onda donositelj odluke mora prihvatiti

$$l \sim l'.$$

Definicija 1.2.1. *REFERENTNU LUTRIJU, u oznaci $x_1 p x_k$, definiramo kao lutriju*

$$x_1 p x_k := \langle p, x_1; ...; 0, x_i; ...; 1 - p, x_k \rangle.$$

A5(Monotonost)

$$x_1 p x_k \geqslant x_1 q x_k \Leftrightarrow p \geqslant q.$$

Ovaj aksiom očito vrijedi, jer je po aksiomu netrivijalnosti $A2$ $x_1 \succ x_k$, pa ako $x_1 p x_k$ ima prednost, onda je $p \geqslant q$ i obrnuto, ako je $p \geqslant q$, onda $x_1 p x_k$ ima prednost.

A6(Neprekidnost) Za svaki $x_i \in S$ postoji $0 \geqslant u_i \geqslant 1$ tako da je

$$x_i \sim x_1 u_i x_k.$$

Zbog aksioma monotonosti $A5$, vrijedi da je u_i jedinstveno određen s x_i.

Teorem 1.2.2. *(von Neumann i Morgenstern)*

Ako preferencije donositelja odluke zadovoljavaju aksiome $A1 - A6$, onda postoji funkcija korisnosti na skupu S koja zadovoljava

$$x_i \geqslant x_j \Leftrightarrow u(x_i) \geqslant u(x_j), \forall x_i, x_j \in S.$$

Teorem 1.2.3. *teorem o jedinstvenosti očekivane korisnosti (Jedinstvenost očekivane korisnosti)*

Funkcija korisnosti $u(x)$ određena aksiomima $A1 - A6$ je jedinstvena do na pozitivnu afinu transformaciju, tj. ako je $w(x)$ druga ordinalna funkcija vrijednosti koja je ekvivalentna s u i koja zadovoljava aksiome $A1 - A6$, onda postoje α, β realni brojevi i $\alpha > 0$ tako da je

$$w(x) = \alpha u(x) + \beta$$

Dokaz teorema može se naći u knjizi von Neumanna i Morgensterna [4].

1.3 Kritike

Kritike i rasprave vezane uz teoriju korisnosti se najčešće dijele u dvije velike skupine:

1. Kritike matematičkog modela

   Ova skupina kritika se uglavnom odnosi na kritiku aksiom, tj. na prihvatljivost aksioma i primjenjivost modela u praksi

2. Filozofsko-psihološke kritike

   Veliki broj kritika odnosi se na mogućnost modeliranja slučajnosti (što se ovdje pretpostavloja da je moguće), te na to da li su ljudi spremni to modeliranje prihvatiti kao slučajnost. Naime, mnogi vjeruju da ljudi ne bi isto reagirali kada bi im se neke situacije stvarno dogodile, te da bi dali drugačije preferencije od onih koje su prvotno dali.

Primjer 1.3.1. *Alliasov paradoks*
Prepostavimo da imamo dvije igre na raspolaganju:

1. *opcija A: siguran dobitak 1mil kn*

   opcija B: 10% šanse za dobitak 5mil kn
   89% šanse za dobitak 1mil kn
   1% šanse za dobitak 0 kn

2. *opcija C: 11% šanse za dobitak 1mil kn*
   89% šanse za dobitak 0 kn

   opcija D: 10% šanse za dobitak 5mil kn
   90% šanse za dobitak 0 kn

Istraživanja su pokazala da većina ispitanika instinktivno daje preferencije $A \succ B$ i $D \succ C$. Pogledajmo kakav odgovor daje teorija korisnosti na ovaj primjer. Uzmemo li npr. da u svakoj igri ima 100 listića lutrije, tada možemo napisati tablicu:

	Broj listića		
	1	*2-11*	*12-100*
A	$1mil$	$1mil$	$1mil$
B	0	$5mil$	$1mil$
C	$1mil$	$1mil$	0
D	0	$5mil$	0

Promatrajmo za početak prvu igru, tj. prva dva retka u tablici vezana uz A i B. U zadnjem stupcu su retci identični, pa njih možemo zanemariti pri donošenju odluke, po aksiomu supstitucije $A4$. Dakle, odluka je donešena samo na temelju prva dva stupca.

Ako promatramo drugu igru, dakle retke vezane uz C i D, također možemo zaključiti da su u zadnjem stupcu retci identični, pa ih možemo zanemariti, analogno kao u prvoj igri. No, usporedimo li sada prva dva stupca kod obje igre, možemo vidjeti da se te dvije igre zapravo ne razlikuju. Dakle, teorija korisnosti nalaže da ako donositelj odluke preferira A u odnosu na B, tada bi trebao i preferirati C u odnosu na D, a istraživanja su pokazala drugačije.

Može li se prema tome zaključiti da cijela teorija korisnosti pada u vodu? Zapravo i ne. Prema ovom paradoksu se može zaključiti da donositelji odluke ne moraju biti racionali. Međutim, pokazalo se također da ako bi ispitanici imali priliku ponavljati ove igre više puta, tada bi postajali sve više racionalni, ponašali bi se u skladu ove teorije i poštivali sve aksiome, što daje za razlog da se i dalje vjeruje u teoriju korisnosti i da se ona i dalje istražuje.

Poglavlje 2

Nashovo rješenje problema pregovaranje

2.1 Uvod

Matematički model pregovaranja pretpostavlja da su pregovarači jednako vješti u pregovaranju, da su u stanju obrazložiti svoje preferencije te da je sporazum jasan i nedvosmislen. Pretpostavlja se da svaki pojedinac ima dobro definirane preferencije na skupu svih relevantnih scenarija i kada odabire neki od scenarija, odabere onaj koji najviše preferira.

Već u samom uvodu se može govoriti o ograničenosti i restrikciji ovog modela u odnosu na stvarnonst, jer u realnim situacijama najčešće nije ispunjena barem jedna od navedenih pretpostavki. Naime, ne možemo smatrati da su pregovarači jednako vješti u pregovaranju i da mogu jednako dobro obrazložiti svoje preferencije ili želje, jer je npr. neki političar znatno vještiji u tome, od nekog građanina koji se po prvi puta našao u situaciji da mora pregovarati.

2.2 Kooperativne i nekooperativne igre

Kada se radi o nekooperativnim igrama, tada nema razmjene informacija među igračima, postoje finalna stanja u kojima se igra završava i igrači budu nagdađeni. Igrači biraju strategiju koja minimizira maksimalni gubitak, a to može voditi do rješenja koja nisu najoptimalnija za oba igrača, upravo zbog toga što nije bilo razmjene informacija. Nasuprot tome, kod kooperativnih igara igrači razmjenjuju informacije, točnije, uspoređuju sve moguće opcije i odabire se najpovoljnija po **Paretovom principu**, tj. bolja je ona opcija koja povećeva preferenciju svakog od igrača posebno. To dovodi do problema maksimizacije uz dodatne uvjete, a nepraznost skupa uvjeta je osigurana polaznom opcijom u pregovaranju.

Nashov pojam pregovaranja (dva igrača) opisuje situacije u kojoj:

1. Igrači imaju mogućnost zaključiti povoljan ugovor.
2. Postoji sukob interesa oko toga kakav ugovor postići.
3. U slučaju nemogućnosti dogovora, zadržava se postojeća situacija.

Skup mogućih dogovora označimo s A, a neka skup D predstavlja *status quo*, dakle u slučaju neuspjeha u pregovaranju. Svaki igrač definira relaciju preferencije $\succcurlyeq_i, i = 1,2$ na $A \cup D$ koja je potpuna, refleksivna i tranzitivna. Pregovaračka situacija je u potpunosti opisana s navedena četiri objekta: $A, D, \succcurlyeq_i, i = 1,2$. Skup mogućih dogovora A može poprimiti razne forme, npr. dogovor može biti potpisivanje točno definiranog ugovora ili isplata određenog novčanog iznosa. Također, svaki igrač konstruira svoju korisnost $u_i : A \cup D \to \mathbb{R}$ koja je jedinstvena do na pozitivnu afinu transformaciju prema teoremu 1.2.2.

Problem pregovaranja je sada par (S,d), gdje je $S = \{(u_1(a), u_2(a) : a \in A\}$ i $d = (u_1(D), u_2(D)) \in S$. Također, pretpostavlja se da je skup S kompktan, odnosno zatvoren i ograničen (što ima za posljedicu da su funkcije korisnosti ograničene) i konveksan (što daje restrikciju na A i $u_i, i = 1,2$), te da postoji točka $s \in S$ za koju je $s_i > d_i, i = 1,2$. Dodatno, s $\mathcal{P}$ označimo skup svih problema pregovaranja.

Definicija 2.2.1. *Rješenja problema pregovaranja nazivamo funkciju $f : \mathcal{P} \to S$ koja svakom problemu pregovaranja $(S,d) \in \mathcal{P}$ pridružuje jedinstveni element od S.*

Primjer 2.2.2. *Dilema zatvorenika*

Ovo je vrlo poznat primjer Merrilla Flooda i Melvina Dreshera iz 1950. godine,a dilemom zatvorenika ga je nazvao Albert Tucker, jer ju je predstavio u obliku kratke priče o dva zatvorenika:

Policija je pritvorila dva osumnjičenika koje tereti za teško kriminalno djelo. Za to teško djelo tužitelj nema valjanih dokaza, ali ih ima za jedno lakše. Svaki od zatvorenika na ispitivanju ima dvije mogućnosti

(P) priznati krivnju

(O) optužiti drugoga zatvorenika

Ukoliko oba zatvorenika priznaju krivnju, svaki će biti optužen na 1 *godinu zatvora, ako jedan prizna krivnju, a drugi ga optuži, onda će optuženi zatvorenik dobiti* 4 *godine zatvora, dok će optužitelj biti oslobođen, ako pak svaki od zatvorenika optuži drugog, svaki će biti optužen na* 3 *godine zatvora. Slijedi matrica isplata:*

	P	O
P	$1,1$	$4,0$
O	$0,4$	$3,3$

Prvo pretpostavimo da niti jedan zatvorenik ne zna namjere drugoga. Promotrimo kako bi tada završila ova 'igra'. Ako prvi prizna krivnju, onda će ga drugi optužiti, jer je to za drugoga povoljnije (promatramo prvi redak u matrici). Ako prvi optuži drugoga, tada će drugi optužiti prvoga (promatramo drugi redak u matrici) jer je to za njega povoljnije. Isti zaključak dobijemo ako drugi prizna/optuži (promatramo prvi, odnosno drugi stupac u matrici). Prema tome, obojica dolaze do zaključka da je najbolje optužiti jedan drugoga, čime će obojica dobiti svaki po 3 *godine zatvora. Takav par strategija nazivamo* ***Nashovom ravnotežom****.*

Međutim, da su zatvorenici mogli izmijeniti informacije, onda bi surađivali i došli bi do zaključka da je bolje priznati krivnju, jer bi time svaki dobio po 1 *godinu zatvora, a ne kao u prvom slučaju svaki po* 3*.*

Paradoks dileme zatvorenika je da iako se slijede vlastiti interesi, to vodi protiv samih tih interesa, tj. dovodi do 3 godine zatvora, umjesto 1. Takve dileme se događaju u svakodnevnom životu zapravo vrlo često, te stoga navodim nekoliko takvih primjera.

Primjer 2.2.3. *Dilema trgovaca*

Dva trgovca, jedan preko puta drugoga, prodaju isti proizvod čiju cijenu moraju oglasiti početkom svakog tjedna i ne smiju je mijenjati u tom tjednu. Obojica razmišljaju na sljedeči način:

"Kado bih drugog trgovca izbacio iz posla moja bi se zarada udvostručila. Možda bih zato trebao sniziti svoju cijnu i tako kupce privući sebi, a odvući ih od konkurencije."

Potaknuti ovom idejom trgovci su obavili proračune i zaključili da će snižavanjem cijene povećati svoj profit s 1 *na* 4 *obračunske jedinice, pod uvjetom da drugi trgovac zadrži svoju cijenu. On će tada biti na gubitku* 3 *obračunske jedinice i to će ga vjerojatno izbaciti iz posla. Ako oba trgovca snize cijenu, profit obojice će pasti na* 0 *obračunskih jedinica, što će ugroziti oba posla. Sve to možemo zapisati u sljedećoj tablici:*

	snizi	*ne snizi*
snizi	$0,0$	$4,-3$
ne snizi	$-3,4$	$1,1$

Dilema trgovaca identična je dilemi zatvorenika. Što god učinio jedan trgovac, drugome je bolje da snizi svoju cijenu. Ako drugi trgovac snizi svoju cijenu i prvome je bolje da snizi svoju cijenu, jer je bolje 0 *od* −3*. Ako pak drugi trgovac ne snizi svoju cijenu, prvome je opet bolje da je snizi, jer je* 4 *bolje* 1*. Prema tome, prvom trgovcu je bolje da snizi cijenu. Analogno vrijedi i za drugog trgovca.*

Slijedeći svoje želje za većim profitom, oba će trgovca sniziti svoje cijene i ostati bez profita, a da nisu snizili cijene ostao bi im stari profit od 1 *obračunske jedinice.*

Primjer 2.2.4. *Dilema o naoružanju*

Logika utrke u naoružanju također je logika zatvorenikove dileme. Ravnoteža između supersila može se postići tako da se one obje naoružaju "do zuba" ili da se obje naoružaju umjereno. Jeftinija ravnoteža, koja se postiže umjerenim naoružanjem, za obje je supersile bolja opcija. No njihova će trka ipak završiti u ravnoteži ogromnih arsenala. Tablica za navedenu situaciju izgleda ovako:

	"do zuba"	*umjereno*
"do zuba"	$2,2$	$4,1$
umjereno	$1,4$	$3,3$

Brojevi određuju redosljed preferencij pojedinih ishoda za obje strane: veći broj preferiran je manjim, dakle 4 *je bolje od* 3 *i slično. Umjerena ravnoteža* $(3,3)$ *bolja je od skupe ravnoteže* $(2,2)$*. Prvoj je supersili najbolje biti jako naoružanom, ako je njen protivnik slabo naoružan. To odgovara ishodu* $(4,1)$*. Najgore joj je biti slabo naoružanom, ako je njen protivnik jako naoružan. To odgovara ishodu* $(1,4)$*. Isto vrijedi i za drugu super silu. Prema tome, opet ćemo dobiti rezultat koji će dovesti supersile do toga da završe u lošijoj, skupljoj i opasnijoj poziciji* $(2,2)$*, a ne u boljoj, jeftinijoj i maje opasnoj* $(3,3)$*.*

2.3 Nashovi aksiomi

Nash je u originalnom članku [2] postavio sedam aksioma. Prvi je ušao u našu definiciju pregovaranja (jedinstvenost), a posljednja dva služe za restrikciju problema na jednu početnu točku pregovaranja što je ovdje ušlo u definiciju problema pregovaranja. Prema tome, ovdje navodimo četiri Nashova aksioma:

N1(Invarijantnost) Pretpostavimo da je problem pregovaranja (S', d') dobiven iz problema pregovaranja (S, d) transformacijom $s_i \mapsto \alpha_i s_i + \beta_i, \alpha_i > 0, i = 1,2$. Tada je $f_i(S', d') = \alpha_i f_i(S, d) + \beta_i, i = 1,2$.

N2(Simetrija) Ako je problem pregovaranja (S,d) simetričan, onda je $f_1(S,d) = f_2(S,d)$.

N3(Nezavisnost) Ako su (S,d) i (T,d) problemi pregovaranja takvi da je $S \subset T, f(T,d) \in S$ tada je $f(S,d) = f(T,d)$.

N4(Pareto) Neka je (S,d) problem pregovaranja, $s \in S, t \in S$ i $t_i > s_i, i = 1,2$. Tada je $f(S,d) \neq s$.

Teorem 2.3.1. *(Nash)*
Postoji jedinstveno rješenje pregovaranja $f^N : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2$ koja zadovoljava aksiome $N1 - N4$. Rješenje je dano s

$$f^N(S,d) = \operatorname*{arg\,max}_{(d_1,d_2)\leqslant(s_1,s_2)\in S} (s_1 - d_1)(s_2 - d_2).$$

Dokaz. Dokaz provodimo u 3 koraka.

1.KORAK $f^N(S,d)$ je dobro definirana
Skup $\{s \in S : s \geqslant d\}$ je kompaktan, zbog uvjeta s početka. Definirajmo funkciju h tako da je $h(s_1,s_2) := (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$ i vrijedi da je h neprekidna, pa zbog toga postiže maksimum na tom kompaktnom skupu. Preostaje još pokazati da je točka maksimuma jedinstvena. U tu svrhu, pretpostavimo suprotno, odnosno, neka su $s^A = (s_1^A, s_2^A)$ i $s^B = (s_1^B, s_2^B)$ dvije točkoje koje su obje maksimum, pa zbog toga vrijedi da je $h(s^A) = h(s^B)$. Tada je također $s^* = \frac{1}{2}s^A + \frac{1}{2}s^B \in S$ zbog konveksnosti.

Označimo $s^* = (s_1^*, s_2^*)$. Izračunajmo što je $h(s^*) = s_1^* s_2^*$:

$$\begin{aligned}
h(s^*) &= h\left(\frac{1}{2}s_1^A + \frac{1}{2}s_1^B, \frac{1}{2}s_2^A + \frac{1}{2}s_2^B\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}s_1^A + \frac{1}{2}s_1^B\right)\left(\frac{1}{2}s_2^A + \frac{1}{2}s_2^B\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(s_1^A s_2^A + s_1^A s_2^B + s_1^B s_2^A + s_1^B s_2^B\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[h(s^A) + s_1^A s_2^B + s_1^B s_2^A + h(s^B)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[h(s^A) + s_1^A s_2^B + s_1^B s_2^A + h(s^A)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[2h(s^A) + s_1^A s_2^B + s_1^B s_2^A\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[h(s^A) + s_1^A s_2^B + s_1^B s_2^A + 2h(s^A) - 2h(s^A)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[4h(s^A) + s_1^A s_2^B + s_1^B s_2^A + s_1^A s_2^A + s_1^B s_2^B\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[4h(s^A) + s_1^A (s_2^B - s_2^A) - s_1^B (s_2^B - s_2^A)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[4h(s^A) + (s_1^A - s_1^B)(s_2^B - s_2^A)\right] \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Definirajmo: $u_1 := s_1^A - s_1^B$ i $u_2 := s_2^B - s_2^A$. Sada tvrdimo da su u_1, u_2 oba strogo pozitivni ili oba strogo negativni, pa ćemo onda dobiti da je umnožak $u_1 u_2$ strogo pozitivan. Znamo da su s^A i s^B različite točke maksimuma, pa su zbog toga na rubu skupa S. Jer su točke različite, jedna od njih ima veću prvu koordinatu. Pretpostavimo prvo da je to točka s^A, odnosno da vrijedi $s_1^A > s_1^B$, ali tada je nužno $s_2^A < s_2^B$, jer bi inače postojala dominacija. Time smo dobili da su $u_1, u_2 > 0$, pa je takav i umnožak. Pretpostavimo li obrnuto, da je $s_1^A < s_1^B$, dobijemo da su $u_1, u_2 < 0$, pa je onda umnožak strogo pozitivan. Dakle, iz navedenog slijedi da je $h(s^*) > h(s^A) = h(s^B)$, što je kontradikcija s pretpostavkom da se maksimum postiže u točkama s^A i s^B. Time smo u potpunosti dokazali da je $f^N(S, d)$ je dobro definirana.

<u>2.KORAK</u> f^N zadovoljava aksiome $N1 - N4$

a) $N1$(Invarijantnost)
Pretpostavimo da je problem pregovaranja (S', d') dobiven iz problema pregopvaranja (S, d) transformacijom $s_i \mapsto \alpha_i s_i + \beta_i, \alpha_i > 0, i = 1, 2$. Dakle,

vrijedi:

$$s' \in S \Leftrightarrow s'_i = \alpha_i s_i + \beta_i, i = 1,2.$$

Tada je:

$$\begin{aligned}(s'_1 - d'_1)(s'_2 - d'_2) &= (\alpha_1 s_1 + \beta_1 - (\alpha_1 d_1 + \beta_1))(\alpha_2 s_2 + \beta_2 - (\alpha_2 d_2 + \beta_2)) \\ &= (\alpha_1 s_1 - \alpha_1 d_1)(\alpha_2 s_2 - \alpha_2 d_2) \\ &= \alpha_1 \alpha_2 (s_1 - d_1)(s_2 - d_2) \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Iz čega slijedi (zbog $\alpha_1, \alpha_2 > 0$):

$$\begin{gathered}(s_1^*, s_2^*) \text{ maksimizira } h(s_1, s_2) \text{ na } S \\ \Leftrightarrow \\ (\alpha_1 s_1^* + \beta_1, \alpha_1 s_2^* + \beta_2) \text{ maksimizira } h(s'_1, s'_2)\end{gathered}$$

b) $N2$(Simetrija)
Pretpostavimo da je problem pregovaranja simetričan i neka (s_1^*, s_2^*) maksimizira funkciju $h(s_1, s_2)$ na S. Zbog simetrije je tada $h(s_1^*, s_2^*) = h(s_2^*, s_1^*)$, pa zbog jedinstvenosti točke maksimuma (dokazano u 1.koraku) slijedi $s_1^* = s_2^*$

c) $N3$(Nezavisnost)
Ako $s^* \in S \subset T$ maksimizira $h|_T$, onda maksimizira i restrikciju $h|_S$.

d) $N4$(Pareto)
f^N zadovoljava ovaj aksiom zbog činjenice da je h strogorastuća u svakoj varijabli, a mi tražimo maksimum.

<u>3.KORAK</u> f^N je jedina funkcija koja zadovoljava $N1 - N4$
Pretpostavimo suprotno, tj. neka je f neka druga funkcija koja zadovoljava $N1 - N4$. Dokazat ćemo da je $f = f^N$, tj. da za svaki problem (S, d) vrijedi $f(S, d) = f^N(S, d)$.

a) Jer f i f^N zadovoljavaju $N1 - N4$, posebno i aksiom invarijantnosti $N4$, pa možemo definirati α i β tako da vrijedi:

$$\begin{gathered} d = (d_1, d_2) = (0,0) \\ z := f^N(S, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).\end{gathered}$$

Preciznije: Pretpostavimo da je početni problem pregovaranja (S^0, d^0) i promatramo transformaciju $s_i^0 \mapsto \alpha_i s_i^0 + \beta_i, \alpha_i > 0, i = 1,2$ i neka je z^0

rješenje. Tada je

$$\begin{aligned} z_i = \alpha_i z_i^0 + \beta_i &= \frac{1}{2} \\ \alpha_i z_i^0 &= \frac{1}{2} - \beta_i \\ \alpha_i &= \frac{\frac{1}{2} - \beta_i}{z_i^0} \\ \alpha_i &= \frac{1 - 2\beta_i}{2z_i^0} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Također vrijedi:

$$\begin{aligned} d_i = \alpha_i d_i^0 + \beta_i &= 0 \\ \alpha_i d_i^0 &= -\beta_i \\ \alpha_i &= \frac{-\beta_i}{d_i^0} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Rješavamo sustav jednadžbi (2.3) i (2.4):

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1 - 2\beta_i}{2z_i^0} \\ \alpha_i &= \frac{-\beta_i}{d_i^0} \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\beta_i}{2z_i^0} &= \frac{-\beta_i}{d_i^0} \\ d_i^0 - 2d_i^0 \beta_i &= -2z_i^0 \beta_i \\ 2\beta_i (z_i^0 - d_i^0) &= -d_i^0 \\ \beta_i &= \frac{-d_i^0}{2(z_i^0 - d_i^0)} \qquad (2.6) \\ \alpha_i &= \frac{-1}{2(z_i^0 - d_i^0)} \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Time smo točno definirali potrebnu transformaciju u aksiomu invarijantnosti $N4$ kako bismo dobili $d = (0,0)$ i $z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Zbog toga je dovoljno dokazati da je $f(S,0) = z$.

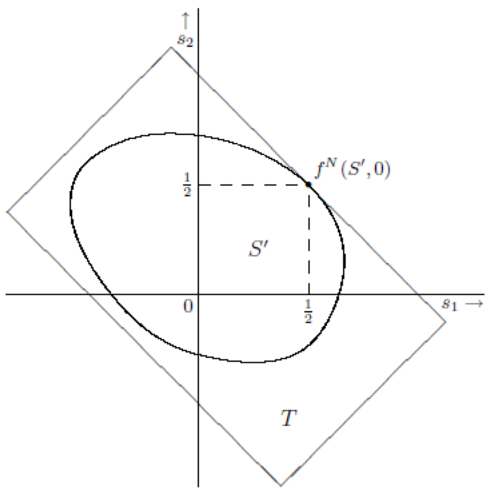
b) Tvrdimo da S ne sadrži $s = (s_1, s_2)$ za koji je $s_1 + s_2 > 1$
Pretpostavimo suprotno. Obzirom da je S konveksan, vrijedi da je $t = (1-\varepsilon)z + \varepsilon s, 0 < \varepsilon < 1$ element od S, budući da je to konveksna kombinacija elemenata iz S. Dakle

$$t = \left((1-\varepsilon)\frac{1}{2} + \varepsilon s_1, (1-\varepsilon)\frac{1}{2} + \varepsilon s_2\right)$$

Jer je $s \in S$ vrijedi $s_1, s_2 \geqslant 0$, pa je $\varepsilon s_1, \varepsilon s_2 \geqslant 0$ i zbog pretpostavke je barem jedno od toga strogo veće od 0 što, za dovoljno mali ε, daje da je $t_1 t_2 > \frac{1}{4}$. Jer je $d_1 = d_2 = 0$, slijedi da je $t_1 t_2 = (t_1 - d_1)(t_2 - d_2) > \frac{1}{4}$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $z = f^N(D, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ rješenje problema pregovaranja.
Dakle, vrijedi:

$$s \in S \Rightarrow s_1 + s_2 \leqslant 1.$$

c) Jer je S ograničen i zbog prethodno dokazanog, postoji pravokutnik T koji sadrži S, simetričan u odnosu na diagonalu prvog i trećeg kvadranta i tako da je $z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ na rubu od T (nije nužno da stranice pravokutnika T budu paralelne s koordinatnim osima).



Slika 2.1: Nashovo rješenje(3.korak, c) dio)

d) Problem je simetričan, pa zbog aksioma simetrije $N2$ vrijedi da je $f_1(T,0) = f_2(T,0)$, što znači da rješenje $f(T,0)$ mora biti na diagonali. S druge strane, z dominira sve ostale točke $s \in T$ koje su na diagonali, pa one zbog Paretovog aksioma ne mogu biti rješenje. Dakle, vrijedi da je $f(T,0) = z$.

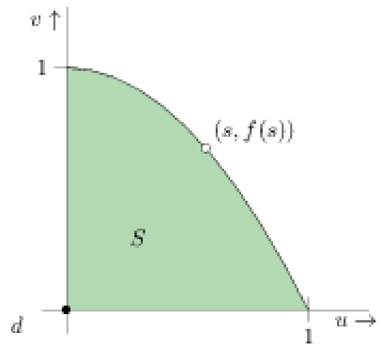
e) Sada imamo $S \subset T, f(T,0) \in S$, pa aksiom nezavisnosti $N3$ daje da je $f(S,0) = f(T,0) = z$.

□

Primjer 2.3.2. *Podjela torte*
Pretpostavimo da imamo dva igrača koji žele podijeliti okruglu tortu jediničnog volumena. Sve moguće podjele torte možemo zapisati kao:

$$S = \{(x,y) | x + y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$$

gdje je x dio torte koju dobiva prvi igrač, a y dio torte koju dobiva drugi igrač. Uvjeti $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ kaže da su igrači spremni podijeliti tortu i tako da netko ne dobije ništa, a $x + y \leqslant 1$ znači da može ostati dio torte koji je nepodjeljen.



Slika 2.2: Podjela torte

Neka je $(0,0)$ početna točka pregovaranja i pretpostavimo da su korisnosti igrača:

$$u_1(x,y) = x$$
$$u_2(x,y) = y.$$

Podjela za koju je $x + y < 1$ nije optimalna, jer svaki od igrača može dobiti još torte i pri *tom ostvariti veću korisnost. Dakle, efikasna granica od S je oblika $(x, 1-x)$. Nashov produkt $x(1-x)$ poprima maksimum za $x = \frac{1}{2}$, dakle Nashovo rješenje je $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.*

2.4 Analiza Nashovih aksioma

Nakon dokazanog Nashovog teorema, sljedeći korak je pitati se da li su baš svi aksiomi nužni i možemo li koji oslabiti. Pretpostavimo da vrijede svi aksiomi osima jednoga, pa ćemo pokazati da se tada Nashovo rješenje razlikuje od dobivenog maksimuma.

1. $N1$(Invarijantnost)
   Pretpostavimo dakle da ne vrijedi prvi Nashov aksiom. Cilj je naći problem pregovaranja tako da će se njegovo rješenje razlikovati od Nashovog rješenja. U tu svrhu, neka je funkcija $g : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$ koja je rastuća u svakoj varijabli, strogo konkavna i takva da svaka nivo linija $g(x,y) = c$ siječe dijagonalu prvog i trećeg kvadranta pod kutem od 90°. Neka je (S,d) problem pregovaranja i neka je
   $$s^* = \operatorname*{arg\,max}_{(d_1,d_2)\leqslant(s_1,s_2)\in S} g(s_1-d_1)(s_2-d_2).$$
   Pokažimo sada da su svi ostali aksiomi zadovoljeni.

   a) $N2$(Simetrija)
      Pretpostavimo da je problem pregovaranja simetričan i neka s^* nije na dijagonali prvog i trećeg kvadranta. Tada se zrcaljenjem u odnosu na tu dijagonalu može dobiti još jedna točka maksimuma $v^* \neq s^*$ zbog pretpostavke da svaka nivo linije $g(x,y) = c$ siječe dijagonalu pod 90°. Zbog stroge konkavmosti postoji točka w^* na segmentu koja sadrži v^* i s^* i tako da funkcija $g(x,y)$ u točki w^* poprima veću vrijednost nego u točki s^*, odnosno v^*, što je kontradikcija s pretpostavkom da se maksimum poprima u s^*.
   b) $N4$(Pareto)
      Ovaj aksiom vrijedi jer je s^* na Paretovoj granici zbog toga što je dobivena maksimizacijom funkcije $g(x,y)$ koja je rastuća u svakoj varijabli.
   c) $N3$(Nezavisnost)
      Vrijedi analogno kao i Paretov aksiom.

   Time smo pokazali da su svi ostali aksiomi zadovoljeni.
   Neka je sada:
   $$g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$S = co\{(0,2),(1,0),(0,0)\}$$
$$d = (d_1, d_2) = (0,0).$$

Dakle, rješavamo problem

$$\max_{(s_1,s_2)\in S} g(s_1, s_2)$$
$$2x + y - 2 = 0$$

Problem maksimizacije uz dodatne uvjete rješavamo pomoću Lagrangeovog multiplikatora . Stoga, definiramo funkciju:

$$G(s_1, s_2, \lambda) := g(s_1, s_2) - \lambda(2s_1 + s_2 - 2 = 0)$$

Za koju vrijedi:

$$\frac{\partial G}{\partial s_1} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial s_2} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 \tag{2.8}$$

Računamo derivacije:

$$\frac{\partial G}{\partial s_1} = \frac{1}{2\sqrt{s_1}} - 2\lambda = 0 \tag{2.9}$$
$$\frac{\partial G}{\partial s_2} = \frac{1}{2\sqrt{s_2}} - \lambda = 0 \tag{2.10}$$
$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = -2s_1 - s_2 + 2 = 0 \tag{2.11}$$

Iz (2.9) slijedi:
$\frac{1}{2\sqrt{s_1}} = 2\lambda \Rightarrow \sqrt{s}_1 = \frac{1}{4\lambda} \Rightarrow s_1 = \frac{1}{16\lambda^2}$
Analogno dobivmo iz (2.10):
$\frac{1}{2\sqrt{s_2}} = \lambda \Rightarrow \sqrt{s}_2 = \frac{1}{2\lambda} \Rightarrow s_2 = \frac{1}{4\lambda^2}$
Iz (2.11) slijedi:

$$\begin{aligned}
-2\frac{1}{16\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} + 2 = 0 \\
-2 - 1 + 32\lambda^2 = 0 \\
\lambda^2 = \frac{3}{16} \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem (2.12) u jednadžbe za s_1 i s_2 slijedi

$$s_1 = \frac{1}{3} \qquad (2.13)$$

$$s_2 = \frac{4}{3} \qquad (2.14)$$

Dakle, rješenje ovog problema pregovaranje je $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$
Analogno računamo Nashovo rješenje:

$$\max_{(s_1,s_2)\in S} (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$$

$$-2x + y - 2 = 0$$

gdje je

$$d = (d_1, d_2) = (0, 0)$$

.

$$s^* = \operatorname*{arg\,max}_{(d_1,d_2)\leqslant(s_1,s_2)\in S} (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$$

Problem maksimizacije uz dodatne uvjete rješavamo opet pomoću Lagrangeovog multiplikatora, pa definiramo funkciju:
$F(s_1, s_2, \lambda) := s_1 s_2 - \lambda(2s_1 + s_2 - 2 = 0)$ Za koju vrijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial s_1} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial s_2} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Računamo derivacije:

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} = s_2 - 2\lambda = 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_2} = s_1 - \lambda = 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -2s_1 - s_2 + 2 = 0 \tag{2.18}$$

Iz (2.16), odnosno (2.17) slijedi:

$$s_1 = \lambda \tag{2.19}$$

$$s_2 = 2\lambda \tag{2.20}$$

Iz (2.18) slijedi:

$$-2\lambda - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \tag{2.21}$$

Uvrštavanjem (2.21) u jednadžbe za s_1 i s_2 slijedi

$$s_1 = \frac{1}{2} \tag{2.22}$$

$$s_2 = 1 \tag{2.23}$$

Dakle Nashovo rješenje je $(\frac{1}{2}, 1)$ što je različito od rješenja problema pregovaranja $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

2. $N2$(Simetrija)
Pretpostavimo da vrijede svi Nashovi aksiomi osim aksioma simetrije. Za svaki $\alpha \in < 0, 1 >$ promatramo

$$s^* = \underset{(d_1,d_2)\leqslant(s_1,s_2)\in S}{\arg\max} (s_1 - d_1)^\alpha (s_2 - d_2)^{1-\alpha}$$

Dakle, ako je $\alpha \neq \frac{1}{2}$, radi se o nesimetričnom problemu. Direktno se vidi da svi ostali aksiomi vrijede. Neka je

$$S = co\{(1,0),(0,1),(0,0)\}$$
$$d = (d_1, d_2) = (0,0)$$

Želimo naći rješenje problema pregovaranja, pa rješavamo problem maksimizacije uz dodatne uvjete, kao i do sad, Lagrangeovom metodom:

$$\max_{(d_1,d_2)\leqslant(s_1,s_2)\in S} (s_1 - d_1)^{\alpha}(s_2 - d_2)^{1-\alpha}$$
$$s_1 + s_2 - 1 = 0$$

Definiramo
$$G(s_1, s_2, \lambda) = s_1^{\alpha} s_2^{1-\alpha} - \lambda(s_1 + s_2 - 1)$$

Kao i do sada, vrijedi da je:

$$\frac{\partial G}{\partial s_1} = \alpha s_1^{\alpha-1} s_2^{1-\alpha} - \lambda = 0 \tag{2.24}$$
$$\frac{\partial G}{\partial s_2} = (1-\alpha) s_1^{\alpha} s_2^{-\alpha} - \lambda = 0 \tag{2.25}$$
$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = -s_1 - s_2 + 1 = 0 \tag{2.26}$$

Izjednačimo (2.24) i (2.25):

$$\alpha \frac{s_1^{\alpha}}{s_1} \frac{s_2}{s_2^{\alpha}} = (1-\alpha)\frac{s_1^{\alpha}}{s_2^{\alpha}}$$
$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$
$$s_2 = s_1 \frac{1-\alpha}{\alpha} \tag{2.27}$$

Uvrstimo to u (2.26):

$$-s_1 - s_1 \frac{1-\alpha}{\alpha} + 1 = 0$$
$$-\alpha s_1 - s_1 + \alpha s_1 + \alpha = 0$$
$$s_1 = \alpha \tag{2.28}$$
$$s_2 = 1 - \alpha \tag{2.29}$$

Dakle rješenje problema pregovaranja je $(\alpha, 1-\alpha)$, što je različito od Nashovog rješenja, za kojega trivijalno vrijedi da je $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, za $\alpha \neq \frac{1}{2}$

3. $N3$(Nezavisnost)
   Neka je (S,d) problem pregovaranja. Definiramo maksimum korisnosti svakog od igrača:

   $$\bar{s}_i := \max u_i(s), i = 1, 2$$

   i neka je $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2)$. Definiramo rješenje problema pregovaranja $f^{KS}(S,d)$ kao maksimalni element iz S na spojnici d i $\bar{s}$. Lako se vidi da su zadovoljeni svi Nashovi aksiomi osim aksioma nezavisnosti. Za tako definirano rješenje vrijedi da je ono različito od Nashovog rješenja, a u sljedećem poglavlju će biti više govora o tome.

4. $N4$(Pareto)
   Ako pretpostavimo da Paretov aksiom ne vrijedi, direktno slijedi da rješenje neće biti jednako Nashovom, jer će postojati problem pregovaranja kojemu je rješenje $t \in S$ za koji vrijedi da postoji $s \in S$ tako da je $t < s$, što je kontradikcija s činjenicom da tražimo maksimum.

2.5 Geometrijska interpretacija Nashovog rješenja

Ako je s^* rješenje problema pregovaranja koje zadovoljava aksiom simetrije i Paretov aksiom, onda se ono podudara s Nashovim rješenjem $f^N(S,d)$ što se vidi iz dokaza teorema korak 3e.
Definirajno $\Gamma_P(S)$ strogu Paretovu granicu od S:

$$\Gamma_P(S) := \{s \in S | ne\ postoji\ t \in S, t \neq s, t \geqslant s\}$$

Ako je granica glatka krivulja i ako se može zapisati kao rješenje jednadžbe $\Psi(s) = 0$ na nekom otvorenom skupu oko $s^* = f^N(S,d)$, onda rješavamo problem:

$$f^N(s) = \max_{(d_1,d_2) \leqslant (s_1,s_2) \in S} (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$$

$$\Psi(s) = 0$$

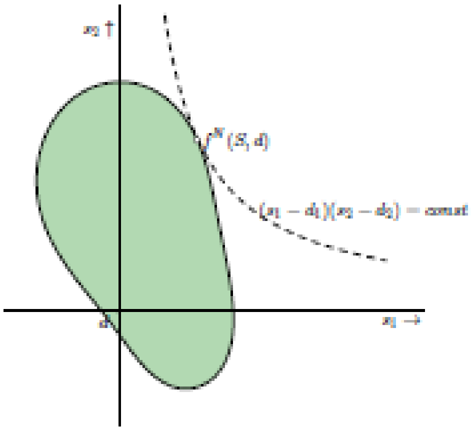
Problem rješavamo koristeći Lagrangeov multiplikator, kao i prije:

$$F(s,\lambda) = f^N(s) - \alpha\Psi$$

Deriviranje funkcije $F(s,\lambda)$ po s te izjednačavanjem s 0 dobivamo (uz $\alpha = \frac{1}{\lambda}$) :

$$\Psi'(s^*) = \lambda \frac{df^N}{ds}(s^*) = \lambda(s_2^* - d_2, s_1^* - d_1).$$

tj. Paretova granica i krivulja $f^N(s)$ se dodiruju u točki s^*, kao što je prikazano na slici.



Slika 2.3: Geometrijska interpretacija Nashovog rješenja

2.6 Proširenje osnovnog modela

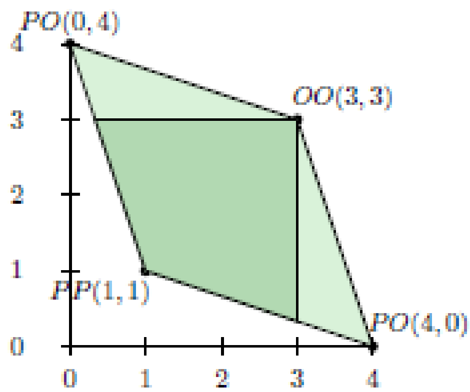
Vratimo se ponovno na Primjer 2.2.2. i proširiti ga.

Pretpostavimo da je p vjerojatnost da će prvi zatvorenik priznati krivnju, a q vjerojatnost da će drugi zatvorenik priznati krivunju. Obzirom da p i q predstavljaju vjerojatnost, vrijedi $p,q \in [0,1]$. Dodatno, promatrat ćemo i korisnosti, pa proširujemo matricu isplata:

	P	O	vjerojatnost 2.	korisnost 1.
P	$1,1$	$4,0$	q	$q + 4(1-q)$
O	$0,4$	$3,3$	$1-q$	$0 + 3(1-q)$
vjerojatnost 1.	p	$1-p$		
korisnost 2.	$p + 4(1-p)$	$0 + 3(1-p)$		

Pogledajmo sada detaljnije kako teče pregovaranje. Odnosno, pretpostavimo da je drugi zatvorenik iskazao vjerojatnost da će on priznati krivnju, odnosno prvom zatvoreniku je poznat q. Tada on računa minumum korisnosti za taj dani q, jer mu je bolje dobiti što manju kaznu. Dakle, on gleda minimum između $q + 4(1 - q) = 4 - 3q$ i $0 + 3(1 - q) = 3 - 3q$. Usporedimo li ta dva izraza, slijedi da je prvom zatvoreniku, bez obzira na dani q, bolje optužiti drugoga, i time dobiti 3 godine zatvora. Isti zaključak bismo dobili ako promatramo drugog igrača kojemu je poznata vjerojatnost p. To odgovara slučaju kada se zatvorenici ne dogovaraju i zbog toga ne dolaze do najoptimalnijeg dogovora.

Promatrajmo sada korisnost proizvoljene točke (p, q) koja je unutar četverokuta kojemu su vrhovi $(1,1), (4,0), (0,4)$ i $(3,3)$.



Slika 2.4: Dilema zatvorenika

Računamo:

$$
\begin{aligned}
u(p,g) &= pq(1,1) + p(1-q)(4,0) + (1-p)q(0,4) + (1-p)(1-q)(3,3) \\
&= (pq + 4p(1-q) + 3(1-p)(1-q), pq + 4(1-p)q + 3(1-p)(1-q)) \\
&= (pq + 4p - 4pq + 3 - 3q - 3p + 3pq, \\
&\quad pq + 4q - 4pq + 3 - 3q - 3p + 3pq) \\
&= (p - 3q + 3, -3p + q + 3) \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

Obzirom da je zatvorenicima bolje dobiti što manju kaznu, tražimo minimum i u tu svrhu računamo gradijent. Direktno se vidi da je

$$grad(u(p,q)) = (1,1).$$

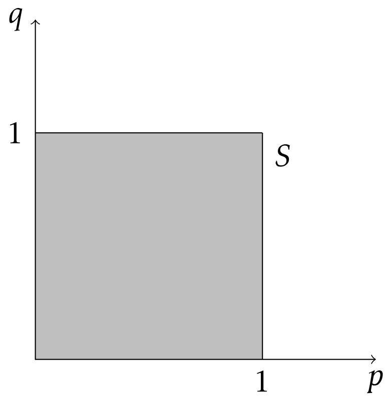
Funkcija u je monotona i zbog linearnosti, jednostavno se vidi da minimum mora biti na rubu i to u točki $(1,1)$ za koju funkcija ima vrijednost $(1,1)$, odnosno svaki zatvorenik dobije po 1 godinu zatvora, što je najoptimalnije. To smo mogli zaključiti i na drugačiji način. Zbog aksioma invarijantnosti $N1$ možemo umjesto $u(p,q)$ promatrati $v(p,q) := (p-3q, -3p+q)$. Tražimo minimum funkcija korisnosti obje koordinate, $v_1 := p-3q, v_2 := -3p+q$. Dakle treba riješiti sustav:

$$\min_{p,q}(z(p,q)) = \begin{pmatrix} p-3q \\ -3p+q \end{pmatrix}$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} p &\leqslant 1 \\ q &\leqslant 1 \\ p &\geqslant 0 \\ q &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Minimum funkcije cilja možemo odrediti i grafički.



1. $z_1 := p-3q$
   Poprima minimum na S za $p=0, q=1$ i vrijednost je $z_1^* = z_1(0,1) = 0-3*1 = -3$

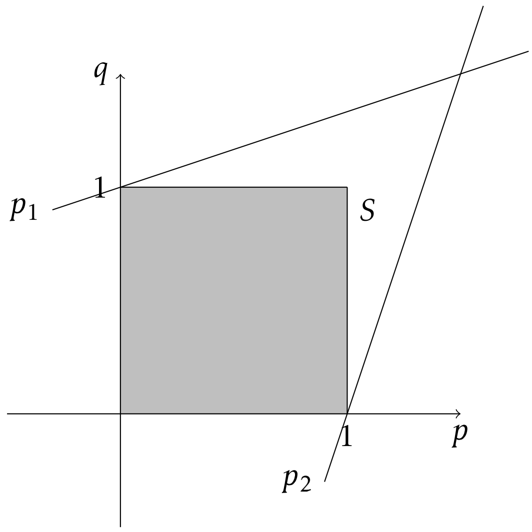
2. $z_2 := -3p+q$
   Poprima minimum na S zs $p=1, q=0$ i vrijednost je $z_2^* = z_2(1,0) = -3*1-0 = -3$

Iz toga slijedi da je minimum oba problema, odnosno funkcije cilja z tamo gdje se sijeku pravci

$$\begin{aligned} p1\ldots\ldots\ & p-3q=-3 \\ p2\ldots\ldots\ & -3p+q=-3 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Iz čega slijedi:

$$\frac{p}{-3}+\frac{q}{1}=1$$
$$\frac{p}{1}+\frac{q}{-3}=1$$



$$\begin{aligned} p-3q=-3 &\Rightarrow p=3q-3 \\ -3p+q=-3 & \end{aligned} \tag{2.32}$$

Rješavamo navedeni sustav:

$$\begin{aligned} -3(3q-3)+q&=-3 \\ -9q+9+q&=-3 \\ -8q&=-12 \\ q&=\frac{3}{2} \qquad (2.33) \\ p&=3*\frac{3}{2}-3 \\ p&=\frac{3}{2} \qquad (2.34) \end{aligned}$$

Točka $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ne pripada skupu rješenja, pa problem nema idealno rješenje, ali imamo efikasno rješenje $p = q = 1$ i $v(1,1) = (1,1)$.

Također, možemo se pitati im li smisla promatrati zbroj funkcija korisnosti umjesto umnoška kako je promatrao Nash. Pokušajmo stoga to provesti na ovom primjeru. Sada definiramo funkciju korisnosti kao $w(p,g) = v_1(p,q) + v_2(p,q) = -2p - 2q + 6$. Pitamo se prvo da li je dovoljno zahtjevati strogu monotonost funkcije $w = v_1 + v_2$ u svim varijablama? Provjerimo vrijedi li to u ovom slučaju. Gradijent ove funcije je

$$grad(w(p,q)) = (-2,-2),$$

pa je funkcija strogo padajuća. Od samog početka tražimo minimum funkcije u, odnosno v, a jer je w strogopadajuća, moramo tražiti i minimum funkcije w. Jer su p,q vjerojatnosti, slijedi da funkcija w poprima minimum za $p = q = 1$ i $z^* = z(1,1) = -2 * 1 - 2 * 1 + 6 = 2$. Dakle, promarajući zbroj funkcija korisnosti, u ovom primjeru smo opet dobili rješenje $(1,1)$.
Primjer daje motivaciju za dokazati tu tvrdnju i u općenitom slučaju. Odnosno, želimo pokazati sljedeći teorem:

Teorem 2.6.1. *Neka su $u_i : A \cup D \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$ funkcije korisnosti prvog i drugog igrača. Neka je*

$$f^Z(S,d) = \underset{(d_1,d_2)\leqslant(s_1,s_2)\in S}{\arg\max} (u_1 + u_2).$$

Ako je f^Z strogo monotona, onda je f^Z rješenje problema pregovaranja.

Dokaz. Zbog aksioma invarijantnosti $N1$ možemo pretpostaviti da je $d = (d_1,d_2) = (0,0)$, ali tada se mijenja i skup S, u S', no zbog lakše notacije ostavit ćemo oznaku S. Analogno Nashovom teoremu, tvrdnju dokazujemo u tri koraka.

1.KORAK $f^Z(S,d)$ je dobro definirana
Jer su u_1, u_2 neprekidne, slijedi da je i zbroj $u_1 + u_2$ također neprekidan. Skup S je kompaktan, pa se maksimum postiže. Jer je po pretpostavci $u_1 + u_2$ strogo monotona imamo jedinstvenu točku maksimuma.

2.KORAK f^Z zadovoljava aksiome $N1 - N4$

a) $N1$(Invarijantnost)
Da bismo pokazali da f^Z zadovoljava ovaj aksiom, dovoljno je pokazati da ga zadovoljavaju funkcije u_1, u_2. Pokažimo prvo za u_1. Želimo pokazati da vrijedi $u_1(\alpha s + \beta) = \alpha u_1(s) + \beta$. Zbog teorema o jedinstvenosti očekivane korisnosti znamo da vrijedi $u_1(s) = \alpha u_1(s) + \beta$, pa u_1 zadovoljava ovaj aksiom. Analogno slijedi i za funkciju u_2.

b) $N2$(Simetrija)
Pretpostavimo da je problem pregovaranja simetričan i neka (s_1^*, s_2^*) maksimizira funkciju $z(s_1, s_2)$ na S. Zbog simetrije je tada $z(s_1^*, s_2^*) = z(s_2^*, s_1^*)$, pa zbog jedinstvenosti točke maksimuma (dokazano u 1.koraku) slijedi $s_1^* = s_2^*$.

c) $N3$(Nezavisnost)
Ako $s^* \in S \subset T$ maksimizira $z|_T$, onda maksimizira i restrikciju $z|_S$.

d) $N4$(Pareto)
f^Z zadovoljava ovaj aksiom zbog stroge monotonosti.

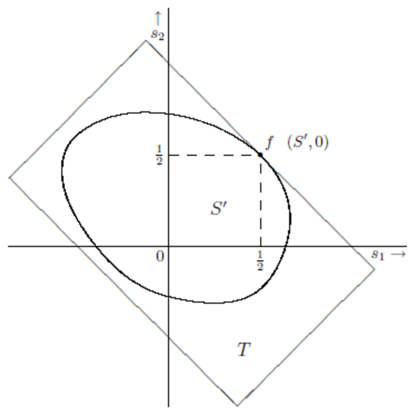
3.KORAK f^Z je jedina funkcija koja zadovoljava aksiome $N1 - N4$
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji funkcija f koja također zadovoljava $N1 - N4$.

a) Na početku je objašenjeno zbog čega uzimamo $d = (0,0)$. Analogno,

$$z := f^Z(S,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Zbog toga je dovoljno dokazati da je $f(S,0) = z$.

b) Zbog ograničenosti skupa S, postoji pravokutnik T koji ga sadrži, i možemo ga definirati tako da bude simetričan u odnosu na dijagonalu prvog i trećeg kvadranta, te da je z na rubu pravokutnika T.



Slika 2.5: Rješenje dobiveno kao zbroj funkcija korisnosti

c) Zbog simetričnosti, rješenje mora biti na dijagonali prvog i trećeg kvadranta, a zbog Paretovog aksioma rješenje je z, tj. $f(T,0) = z$.

d) Imamo da je $S \subset T, f(T,0) \in S$, pa zbog aksioma nezavisnosti slijedi da je $f(S,0) = z$.

□

Poglavlje 3

Kalai-Smorodinsky rješenje problema pregovaranja

3.1 Uvod

Uvedimo neke oznake i osnovne definicije.
Neka je skup S kao i do sada, $S \subset \mathbb{R}_+^2$ definiran s

$$S = \{(u_1(a), u_2(a)) : a \in A\}$$

gdje je A skup svih mogućih dogovora, a funkcije $u_i, i = 1, 2$ korisnosti igrača.
Neka skup D predstavlja *status quo*, dakle to je unaprijed određeni dogovor u slučaju neuspjeha u pregovaranju i pretpostavimo da je D sadržano u S. Pretpostavimo da je $S \cap \mathbb{R}_{++}^2 \neq \emptyset$, gdje je $\mathbb{R}_{++}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. To pretpostavljamo kako bi igrači mogli imati zajedničke i strogo pozitivne korisnosti od pregovaranja. **Problem pregovaranja** je dakle kao i do sada par (S, d), gdje je $S = \{(u_1(a), u_2(a) : a \in A\}$ i $d = (u_1(D), u_2(D)) \in S$. Neka je Σ kolekcija svih takvih uređenih parova (S, d).

Definicija 3.1.1. ***Idealna isplata za igrača*** *i* ***u*** *S definirana je s*

$$a_i(S) = \max\{x_i : x \in S\}.$$

Definicija 3.1.2. ***Idealna točka*** *u S je*

$$a(S) = (a_1(S), a_2(S)).$$

Primijetimo da je zbog uvjeta na S, $a(S) > 0$, $\forall S \in \Sigma$.
Ako je $a(S) = (1, 1)$, reći ćemo da S **normiran**.

Definicija 3.1.3. ***Domena pregovaranja*** *je podskup* $\mathscr{D} \subset \Sigma$.

Ovdje pretpostavljamo sljedeću domenu:

$$\mathscr{B} = \{(S,d) \in \Sigma : [\mathbf{0}, a(S)] \cap S \text{ je konveksan } \}.$$

Primijetimo da $\mathscr{B}$ obuhvaća sve konveksne i obuhvatne probleme pregovaranja, obzirom na sljedeću definiciju.

Definicija 3.1.4. *Za skup S kažemo da je* ***obuhvatan*** *ako je za svaki* $x \in S$ *skup* $\{y \in \mathbb{R}^2_+ : y \leqslant x\}$ *sadržan u S.*

Definicija 3.1.5. ***Rješenje problema pregovaranja*** *na domeni* $\mathscr{D}$ *je funkcija* $\mu : \mathscr{D} \to \mathbb{R}^2_+$ *tako da vrijedi*

$$\mu(S,d) \in S, \forall (S,d) \in \mathscr{D}.$$

Definicija 3.1.6. ***Kalai-Smorodinsky rješenje (KS)*** μ_{KS} *definirase se s:*

$$\mu_{KS}(S,d) = \lambda a(S)$$

gdje je

$$\lambda = \max\{\lambda' : \lambda' a(S) \in S\}. \tag{3.1}$$

3.2 Aksiomi

Neka su $(S,d_S),(T,d_T) \in \mathscr{B}$ proizvoljni problemi pregovaranja i neka je μ neko rješenje problema pregovaranja. Označimo s π funkciju zrcaljenja, odnosno neka je

$$\pi(a,b) = (b,a).$$

Postavljamo sljedeće zahtjeva na rješenje μ:

KS1(Invarijantnost) Ako smo S' dobili iz S translacijom $S \mapsto \alpha S + \beta, \alpha > 0$, onda je $\mu(S',d) = \alpha\mu(S,d) + \beta$.

Zbog ovoga aksioma možemo bez smanjenja općenitoti pretpostaviti da je $d = (0,0)$.

KS2(Simetrija) Ako je $\pi(S) = S$, onda je $\mu_1(S,d_S) = \mu_2(S,d_S)$.

U tom slučaju kažemo da je S simetričan.

KS3(Homogena idealna nezavisnost) Ako je $S \subset T$, $\mu(T,d_T) \in S$ i $a(S) = ra(T)$ za $r \leqslant 1$, onda je $\mu(S,d_S) = \mu(T,d_T)$.

KS4(Netrivijalnost) Postoje $(S, d_S) \in \Sigma$ tako da je $\mu(S, d_S) \neq 0$.

Definiramo particiju skupa $\mathscr{B}$:

$$\mathscr{B}^{deg} = \{(S,d) \in \mathscr{B} : \mu(S,d) = 0\} \tag{3.2}$$

$$\mathscr{B}^{+} = \mathscr{B} \backslash \mathscr{B}^{deg}. \tag{3.3}$$

Lema 3.2.1. *Ako je μ_{KS} Kalai-Smorodinsky rješenje problema pregovaranja na $\mathscr{B}^{deg}$, onda ono zadovoljava aksiome $KS1, KS2$ i $KS3$.*

Dokaz slijedi direktno iz definicije Kalai-Smorodinsky rješenja problema pregovaranja i aksioma.

Teorem 3.2.2. *(Kalai-Smorodinsky)*
Rješenje μ na $\mathscr{B}$ zadovoljava aksiome $KS1, KS2, KS3$ i $KS4$ ako i samo ako je to Kalai-Smorodinsky rješenje problema pregovaranja.

Dokaz. Dokaz provodimo u nekoliko koraka i koristimo skupove $\mathscr{B}^{deg}$ i $\mathscr{B}^{+}$ definirane u (3.2) i (3.3).

Tvrdnja 1: Rješenje na $\mathscr{B}^{deg}$ zadovoljava $KS1, KS2$ i $KS3$ ako i samo ako je to Kalai-Smorodinsky rješenje (*status quo*),tj. ako i samo ako je λ u formuli (3.1) jednako 0

$\boxed{\Leftarrow}$ To je tvrdnja u lemi 3.2.1.

$\boxed{\Rightarrow}$ Vrijedi po pretpostavci.

Time je Tvrdnja 1 u potpunosti dokazana.
Sada ćemo promatrati skup $\mathscr{B}^{+}$. Neka je:

$$\mathscr{B}_0^{+} = \{(S,d) \in \mathscr{B}^{+} : \exists U \text{ otvoreni tako da } \mathbf{0} \in U \ i \ (U \cap \mathbb{R}_{+}^{2}) \subset S\}$$

Tvrdnja 2: Neka je μ rješenje na $\mathscr{B}_0^{+}$ koje zadovoljava $KS1, KS2, KS3$ i $KS4$. Neka je $(S,d) \in \mathscr{B}_0^{+}$ normiran i simetričan problem. Tada je $\mu(S,d) = \mu_{KS}(S,d)$.

Neka su μ i (S,d) kao u iskazu tvrdnje. Tada po aksiomu $KS2$ vrijedi

$$\mu(S,d) = \lambda \mu_{KS}(S,d)$$

za neki $\lambda \in [0,1]$.

a) $\boxed{\lambda = 0}$ Tada po $KS1$ i $KS3$ postoji $R \subset S$ za koji je $\mu(R,d) = 0$, a po definiciji skupa $\mathscr{B}_0^+$, R nije degeneriran. No, tada je po $KS1$ i $KS3$

$$\mu(Q,d) = 0,\ \forall (Q,d) \in \mathscr{B}_0^+$$

no to je kontradikcija s aksiomom $KS4$.

b) $\boxed{\lambda \in (0,1)}$ Neka je $r \in (\lambda, 1)$ i $V = rS$. Tada po $KS1$ i zbog definicije skupa $\mathscr{B}$ vrijedi da postoji takav r da je $\mu(V,d) = r\mu(S,d)$.
S druge strane, po $KS3$ je $\mu(V,d) = \mu(S,d)$, zbog čega bi slijedilo da je $r = 1$, no to je kontradikcija s izborom r, jer smo pretpostavili da je $r < 1$.

Dakle, pokazali smo da λ ne može biti elemet skupa $[0,1)$, te je stoga $\lambda = 1$. Time i Tvrdnja 2 dokazana.

Tvrdnja 3: Neka je μ rješenje na $\mathscr{B}_0^+$ koje zadovoljava $KS1$,$KS2$,$KS3$ i $KS4$. Neka je $(S,d) \in \mathscr{B}_0^+$ normiran problem [1]. Tada je $\mu(S,d) = \mu_{KS}(S,d)$.

Neka su μ i (S,d) kao u iskazu tvrdnje te neka je $T = S \cup \pi(S)$. Tada je skup T normiran i simetričan, pa po tvrdnji 2 slijedi da je $\mu(T,d) = \mu_{KS}(T,d)$. Znamo da je

$$\mu_{KS}(S,d) = (x,x)$$
$$\mu_{KS}(T,d) = (y,y)$$

za $x \leqslant y$.
Pretpostavimo da je $x < y$. Tada $(y,y) \notin S$ jer bi inače ta točka bila rješenje na S. Ali, tada po definiciji skupa T slijedi da je $(y,y) \in \pi(S)$. Zbog toga što je $\pi(\pi(S)) = S$, slijedi da je $(y,y) \in S$, što je u kontradikciji s činjenicom da $(y,y) \notin S$.
Zbog toga je $\mu_{KS}(T,d) = \mu_{KS}(S,d)$, pa je po $KS3$

$$\mu(S,d) = \mu_{KS}(S,d)$$

Time smo dokazali i Tvrdnju 3.

Tvrdnja 4: Neka je μ rješenje na $\mathscr{B}_0^+$ koje zadovoljava $KS1$,$KS2$,$KS3$ i $KS4$. Neka je $(S,d) \in \mathscr{B}_0^+$. Tada je $\mu(S,d) = \mu_{KS}(S,d)$.

Tvrdnja 4 slijedi direktno iz tvrdnje 3 i zbog aksioma $KS1$.

[1] Za razliku od prethodne tvrdnje, ovdje smo izostavili simetričnost

Nakon što smo dokazali ove pomoćne tvrdnje, možemo u potpunosti dokazati teorem.

$\boxed{\Leftarrow}$ KS rješenje zadovoljava aksiome po konstrukciji.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je μ rješenje koje zadovoljava aksiome $KS1, KS2, KS3$ i $KS4$ i neka je $(S,d) \in \mathscr{B}$.

a) $\boxed{(S,d) \in \mathscr{B}^{deg}}$ Tvrdnja 1 daje da je $\mu(S,d) = \mu_{KS}(S,d)$.

b) $\boxed{(S,d) \in \mathscr{B}_0^+}$ **??** daje da je $\mu(S,d) = \mu_{KS}(S,d)$

c) $\boxed{(S,d) \in \mathscr{B}^+ \backslash \mathscr{B}_0^+}$ Tada definiramo $S' = S \cup (U \cap \mathbb{R}_+^2)$, gdje je U proizvolja, dovoljno mala otvorena okolina oko S. **??** daje da je $\mu(S',d) = \mu_{KS}(S',d)$. Možemo odabrati dovoljno malu otvorenu okolinu U tako da se vrijedi

$$\max\{\lambda' : \lambda' a(S) \in S\} = \max\{\lambda' : \lambda' a(S') \in S'\},$$

pa je tada $\mu_{KS}(S',d) = \mu_{KS}(S,d)$ i $\mu(S',d) = \mu(S,d)$. Stoga slijedi da

$$\mu(S,d) = \mu_{KS}(S,d).$$

Time je teorem u potpunosti dokazan.

□

Primjer 3.2.3. *Cilj ovoga primjera je na konkretnim funkcijama korisnosti usporediti Nashovo i Kalai-Smorodinsky rješenje problema pregovaranja.*

Pretpostavimo da brat i sestra žele podijeliti čokoladu i vrećicu bombona. Neka je brat (prvi igrač) dobio čokoladu na poklon, a sestra (drugi igrač) bombone i oni to žele podijeliti, ali sukladno njihovim preferencijama koje su izražene sljedećim funkcijama korisnosti:

$$u_1(x,y) = xy$$
$$u_2(x,y) = x^2 y.$$

Jer je brat dobio čokoladu, njegova početna točka pregovaranja je $(x_1^0, y_1^0) = (1,0)$, *a sestrina je* $(x_2^0, y_2^0) = (0,1)$. *Točke pregovaranja prikazujemo kao postotak, odnosno udio koliko je brat dobio čokolade, a koliko bombona i analogno za sestru. Zbog toga vrijedi*

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$y_1 + y_2 = 1.$$

Nađimo prvo Nashovo rješenje, kao i do sada pomoću Lagrangeovog multiplikatora. Radi lakšeg zapisa, neka je $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$. Maksimiziramo umnožak funkcija korisnosti uz uvjete $x_1 + x_2 = 1$, $y_1 + y_2 = 1$.

Definiramo:

$$F(x, y, \lambda, \mu) = x_1 y_1 x_2^2 y_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 1) - \mu(y_1 + y_2 - 1)$$

i računamo parcijalne derivacije i izjednačavamo ih s 0:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = y_1 x_2^2 y_2 - \lambda = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 y_1 2 x_2 y_2 - \lambda = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = x_1 x_2^2 y_2 - \mu = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = x_1 y_1 x_2^2 - \mu = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x_1 - x_2 + 1 = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = -y_1 - y_2 + 1 = 0 \tag{3.9}$$

Izjednačimo (3.4) i (3.5):

$$y_1 x_2^2 y_2 = x_1 y_1 2 x_2 y_2$$

$$x_2 = 2x_1 \tag{3.10}$$

Izjednačimo (3.6) i (3.7):

$$x_1 x_2^2 y_2 = x_1 y_1 x_2^2$$

$$y_2 = y_1 \tag{3.11}$$

Uvrstimo sada (3.10) i (3.11) u (3.8) odnosno (3.9). Time dobivamo:

$$x_1 + 2x_1 - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \tag{3.12}$$

$$2y_1 - 1 = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \tag{3.13}$$

Time smo dobili Nashovo rješenje $(x_1^*, y_1^*) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$*, te iz toga slijedi da je* $(x_2^*, y_2^*) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$.

Izračunajmo sada Kalai-Smorodinsky rješenje. Ono se traži analogno, uz dodani uvjet

$$x_2^2 y_2 - x_1 y_1 = 0$$

koji vrijedi zbog simetrije.

Obzirom da problem maksimizacije riješavamo pomoću Lagrangeovih multiplikatora, definiramo:

$$F(x, y, \lambda, \mu, \nu) = x_1 y_1 x_2^2 y_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 1) - \mu(y_1 + y_2 - 1) - \nu(x_2^2 y_2 - x_1 y_1)$$

i računamo parcijalne derivacije i izjednačavamo ih s 0*:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = y_1 x_2^2 y_2 - \lambda - \nu y_1 = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 y_1 2 x_2 y_2 - \lambda - 2\nu x_2 y_2 = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = x_1 x_2^2 y_2 - \mu + \nu x_1 = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = x_1 y_1 x_2^2 - \mu - \nu x_2^2 = 0 \tag{3.17}$$

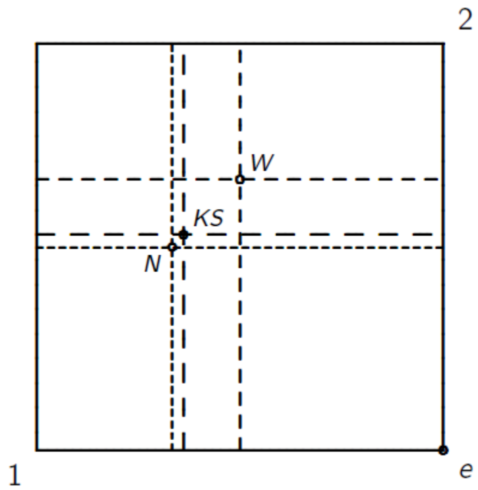
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x_1 - x_2 - 1 = 0 \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = -y_1 - y_2 - 1 = 0 \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \nu} = -x_2^2 y_2 + x_1 y_1 = 0 \tag{3.20}$$

Analogno računajući, dobijemo da je $(x_1^*, y_1^*) = (0.3611, 0.5306)$ *iz čega slijedi da je* $(x_2^*, y_2^*) = (0.6389, 0.4694)$.

Postoje također i drugi pristupi rješavanju problema pregovaranja, a jedan je od njih je Walrasov ekvilibrij (1874.*). Na slici su prikazana ta tri rješenje.*



Slika 3.1: Nashovo, Kalai-Smorodinksy i Walrasovo rješenje

Dodatak

Teorem 3.2.4. *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, neka su funkcije $f, g : A \to \mathbb{R}$ klase C^1. Pretpostavimo da postoji $x_0 \in A$ tako da vrijedi $g(x_0) = 0$ i definirajmo $S = g^{-1}(0)$. Neka je također $\nabla g(x_0) \neq 0$. Ako $f|_S$ ima maksimum ili minimum u x_0 tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi*

$$grad f(x_0) = \lambda grad g(x_0)$$

Dokaz. Promatramo prvo implicitno zadanu funkciju $g(x) = 0$ u točki x_0. Znamo da tangencijalna ravnina te plohe prolazi kroz točku x_0 i okomita je na $grad g(x_0)$. Za svaki put γ kroz $x_0 = \gamma(0)$ vrijedi:

$$g(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) = 0$$

Pa upotrebom pravila za derivaciju kompozicije slijedi da vrijedi:

$$Dg(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

Stoga je $grad g(x_0)$ okomit na svaki tangencijalni vektor krivulje $g(x) = \gamma(0)$ u točki x_0).
S druge strane, ako je u x_0 lokalni ekstrem funkcije $f|_S$ slijedi da je u 0 lokalni ekstrem funkcije $t \mapsto f(\gamma(t))$, jer je $\gamma(0) = x_0$. Stoga je:

$$\left(\frac{d}{dt} g(\gamma(t)) \right)|_{t=0} = 0$$

Iz čega slijedi, analogno, po pravilu za derivaciju kompozicije funkcija:

$$Df(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

Dakle, iz toga slijedi da su $grad f(x_0)$ i $grad g(x_0)$ kolinearni. Zbog pretpostavke da je $\nabla g(x_0) \neq 0$, postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da je:

$$grad f(x_0) = \lambda grad g(x_0)$$

□

Bibliografija

[1] Lavoslav Čaklović, *Teorija korisnosti s naglaskom na metodu potencijala; principi, metode, primjene*, Slap, 2014.

[2] John Nash, *The Barganing Problem*, Econometrica **18** (1950), 155–162.

[3] ______, *Two-Person Cooperative Games*, Econometrica **21** (1953), br. 1, 128–140.

[4] J. von Neumann i O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944, Second edition in 1947, third in 1954.

Sažetak

U ovom radu obrađena je tema pregovaranje i kooperativnih igara. Za to je potrebno razumijvanje osnovnih pojmova iz teorije korisnosti i poznavanje najvažnijih rezultata. To podrazumijeva von Neumannov i Morgensternov teorem koji daje postojanje funkcije korisnosti koja čuva preferncije donositelja odluke, ali mora zadovoljavati slabi uređaj, netrivijalnost, redukciju, supstituciju, monotonost i neprekidnost. Također, važno je i da je dobivena korisnost jedinstvena do na pozitivnu afinu transformaciju. Ta dva rezultat nisu dokazana u ovome radu, jer su dokazi dani na predavanjima.

Glavni dio ovoga rada predstavljaju Nashovi rezultati iz područja pregovaranja. Detaljno je dokazan Nashov teorem koji daje jedinstveno rješenje problema pregovaranja kao argument maksimuma umnoška funkcija korisnosti, uz uvjet da su zadovoljeni aksiomi invarijantnosti, simetrije, nezavisnosti i Paretov aksiom. Svaki od tih aksioma je obrađen i obrazložen, te je dan primjer za svki aksiom koji pokazuje da su svi aksiomi nužni i da se niti jedan ne može ubalažiti. Nashovo rješenje je prikazano i obrazloženo i grafički radi lakšeg razumijevanja.

Osnovni primjer u radu je *"Dilema zatvorenika"*. Na vrlo životnom primjeru je pokazan paradoks igranja isključivo u svrhu ostvarivanja vlastite maksimalne korisnosti. Isto se može vidjeti i na primjeru dva trgovca koji oba žele maksimizirati svoj profit, ali i izbaciti drugog trgovca iz posla; ili na primjeru dvije velesile koje odlučuju o razini naoružanja, što se moglo vidjet i kroz povijest na primjeru SAD-a i SSSR-a. Utrka u naoružanju završila je tek kada je SSSR ostao bez novčanih sredstava, a sve to zbog izostanka kooperacije. To mi je dalo motiv da dođem do poopćenja Nashove teorije. *"Dilema zatvorenika"* poslužila je kao pomoć pri dobivanju osnovne ideje koja se kasnije poopćila. Dano je prvo razrješenje *"Dileme zatvorenika"* i detaljno objašnjeno kako bi igrači trebali igrati da bi ostvarili ukupnu maksimalnu korisnost. Također, na tom primjeru je utvrđeno da možemo promatrati zbroj funkcija korisnosti, što je često jednostavnije od umnoška, i dobiti rješenje identično Nashovom. To je bila motivacija da se isti rezultat pokaže i u općenitom slučaju, uz pretpostvku da je funkcija dobivena zbrajanjem funkcija korisnosti strogo monotoona.

U zadnjem poglavlju promatra se Kalai-Smorodinsky rješenje problema pregovaranja. Dokazan je teorem koji daj nužne i dovoljne uvjete za postojanje Kalai-Smorodinsky rješenja. Zahtjeva se zadovoljavanje aksioma invarijantnosti, simetrije, homogene idealne nezavisnosti i netrivijalnosti. Taj je rezultat također dokazan. Dodatno, obrađen je i primjer koji daje usporedbu Kalai-Smorodinsky i Nashovog rješenja, te pokazuje da postoje i drugi načini rješavanja problema pregovaranja, npr. računanjem Walrasovog ekvilibrija.

Summary

In this these we are studying bargaining and cooperative games. In order to understand that, we should be familiar with the basic terms of the utility theory of von Neumann and Morgenstern, basedon the axioms on the page 8. They are weak condition, non-triviality, reduction, substitution, monotony and continuity. Proofs of those two results are not given in this paper, since they were given in class.

The main part in this study is given by Nash: *The Barganing Problem*, *Econometrica* 18 *(*1950*)*, 155-162 and *Two-Person Cooperative Games*, *Econometrica* 21 *(*1953*)*, *br.* 1, 128-140. Nash's axioms provides a unique solution to the negotiation problem as an argument of the maximum product of the utility function, if the axioms of invariance, symmetry, independence and Pareto axiom are satisfied. Each of these axioms is processed and reasoned, and the example is given for every axiom that shows that all axioms are necessary and that none can be mitigated. Nash's solution is illustrated and explained also graphically so it is more convenient to understand it.

The main example in the paper is *"Prisoner's Dilemma"*. The example shows the paradox of playing solely for the purpose of achieving the maximum utility for yourself. The same can be seen in the example of two traders who both want to maximize their profits, but also throw another trader out of business; or the example of two great powers that have the power to decide the quantity of the armaments, which is shown through the history with the example of the USA and the USSR. The arms race ended when the USSR was left without funds, because of a lack of cooperation. This gave me the motivation to get to generalizations of the Nash theory. *" Prisoner's Dilemma "* served as assistance in obtaining basic ideas which were later generalized. It is given the dismissal of *" Prisoner's Dilemma"* and it was precisely explained how the players should play in order to reach the highest total maximum utility. Also, in this example it is found that we can observe the sum of the utility function, which is often more simple than the product, and get a solution identical to Nash's. This was the motivation to show the same result in the general case, with the premise that the function is obtained by summing the utility function as strictly monotone.

The final chapter discusses the Kalai-Smorodinsky bargaining solution to the problem. The theorem which gives the necessary and sufficient conditions for the existence of Kalai-Smorodinsky solution is proved. Those conditiones are the axioms of scale invariance, symmetry, homogeneous ideal independence of irrelevant alternatives and non-triviality. In addition, an example that provides a comparison of Kalai-Smorodinsky and Nash bargaining solutions was processed and it shows that there are other ways of solving the problem of bargaining, such as calculating Walras equilibrium.

Životopis

Rođena sam 17. svibnja 1990. godine u Vinkovcima, gdje sam završila osnovnu školu A. G. Matoš i srednju gimnaziju M. A. Reljković, matematički smjer te osnovnu glazbenu školu J. Runjanin. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na brojnim natjecanjima iz matematike. 2009. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij matematika na Prirodnoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a završila sam ga 2012. godine i tada sam upisala Diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike na istom fakultetu. Tijekom fakulteta išla sam na studentsku praksu u Zagrebačkoj banci gdje sam stekla iskustvo i uvid u osnove bankarskog sustava i financijkog poslovanja. Na zadnjoj godini studija dobila sam nagradu matematčkog odsjeka najboljim studentima završnih godina studija.